



Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Costa Rica

**Curso: XS-2310 Modelos Probabilísticos Discretos**  
Curso de alta virtualidad

**I Ciclo Lectivo 2022**

<b>Profesor</b>	<b>Horario del curso:</b>	<b>Horas de consulta:</b>
José Andrey Zamora A (Grupo 1)	L, J: 8:00 am a 9:50 am.	L, J: 7:00 a 8:00 a.m mediante zoom
Guaner Rojas (Grupo 2)	L, J: 10:00 am a 11:50 am.	Martes, 16:00 a 18:00 mediante zoom

**Requisitos:** XS-1130 y MA-1021,

**Co-requisito:** XS-2110.

**Créditos:** 4

---

### Descripción

El curso forma parte del segundo año de la carrera de Bachillerato en Estadística. El enfoque del curso es teórico-práctico, y proporciona los elementos básicos de la teoría de la probabilidad en espacios discretos con aplicaciones a juegos de azar, muestreo, salud, demografía, finanzas, entre otras. La aprobación del curso es un requisito para cursar Modelos Probabilísticos Continuos (XS-2330).

### Objetivo general

Impartir los conceptos, teoremas y distribuciones básicos de la teoría de la probabilidad en espacios discretos, con aplicaciones reales a varios campos.

### Objetivos específicos

Al finalizar el curso, se espera que el estudiante:

- Entienda y sepa aplicar los teoremas básicos de probabilidades en espacios probabilísticos discretos.
- Reconozca las distribuciones de probabilidad discretas básicas y pueda calcular probabilidades manualmente, mediante tablas, hojas de cálculo y el programa R.
- Comprenda y sepa aplicar el concepto de valor esperado y sus propiedades.
- Comprenda y sepa manejar los conceptos de distribución de probabilidad discreta en una y más dimensiones, distribución marginal y condicional, momentos, covariancia, correlación y generatriz de momentos
- Conozca las relaciones entre varias distribuciones como la binomial, Poisson, hipergeométrica, y entre la binomial y la distribución normal.
- Aprecie la utilidad de la teoría de la probabilidad como fundamento de la disciplina de la estadística.
- Conozca varias aplicaciones de la teoría de la probabilidad al muestreo, juegos de azar, finanzas,





salud, etc.

- Adquiera el conocimiento básico necesario para el curso XS-2330 Modelos Probabilísticos Continuos.

## Contenidos

### Tema 1: Conceptos fundamentales de probabilidades en espacios discretos

- 1.1 Origen de la teoría de la probabilidad. Juegos de azar, experimento aleatorio y definición clásica de probabilidad. Espacio muestral, sucesos o eventos. Consecuencias de la definición clásica: propiedades de las probabilidades. La frecuencia relativa de un suceso. Técnicas de conteo: principios fundamentales del análisis combinatorio, permutaciones (con y sin repetición) y combinaciones. Muestras ordenadas y sin ordenar, con o sin reemplazo. Concepto de muestra simple al azar. Cálculo de probabilidades utilizando permutaciones y combinaciones.
- 1.2 Problemas del enfoque clásico de la probabilidad. Otros enfoques: frecuencia relativa, probabilidad subjetiva, método axiomático. Desarrollo del método axiomático: Axiomas para sucesos y axiomas para probabilidades. Concepto de medida de probabilidad y espacio probabilístico. Medida de probabilidad equiprobable. Teoremas básicos. Probabilidad de un suceso.
- 1.3 Probabilidad condicional e independencia de sucesos. Ley multiplicativa. Cálculo de la probabilidad de un suceso: método de la composición de eventos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.
- 1.4 Introducción al concepto de cadenas de Markov.

### Tema 2: Variables aleatorias discretas unidimensionales

- 2.1 Definición de variable aleatoria. Variable aleatoria discreta. La función o distribución de probabilidad. Función de distribución acumulativa. Distribuciones básicas: uniforme, Bernoulli, binomial, hipergeométrica, geométrica, binomial negativa y Poisson.
- 2.2 Valor esperado de una variable aleatoria discreta:  $E(X)$ ,  $E[g(X)]$ ,  $\text{Var}(X)$ , desviación estándar. Momentos poblacionales. Funciones generatrices de momentos. Cálculo de las medias, variancias y generatrices de momentos de las distribuciones básicas. Transformación de variables. Determinación de la distribución de probabilidad de  $Y = g(X)$  mediante las técnicas del cambio de variable y de la generatriz de momentos.
- 2.3 Uso de software estadísticos para calcular probabilidades.

### Tema 3: Variables aleatorias discretas multidimensionales

- 3.1 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad bidimensionales. Distribuciones marginales y condicionales. Variables aleatorias independientes. Función de distribución acumulada  $F(x,y)$ . Valor esperado de  $g(X,Y)$ . Casos particulares:  $\text{Cov}(X,Y)$ , Correlación  $(X,Y)$ ,  $\text{Var}(aX + bY + c)$ . Valores esperados condicionales:  $E(Y|X)$ ,  $\text{Var}(Y|X)$  y  $E[g(Y|X)]$ .
- 3.2 Variables aleatorias y distribuciones multidimensionales. Distribuciones marginales y condicionales.
- 3.3 Valores esperados de funciones de varias variables aleatorias:  $E[g(X_1, \dots, X_k)]$ . Casos particulares:  $E[\mathbf{a}'\mathbf{X}]$ ,  $\text{Var}[\mathbf{a}'\mathbf{X}]$ ,  $\text{Cov}(\mathbf{a}'\mathbf{X}, \mathbf{b}'\mathbf{Y})$ . Concepto de generatriz de momentos conjunta. Media y variancia del promedio muestral en muestreo simple al azar. Concepto de muestra aleatoria en



poblaciones infinitas.

3.4 La distribución hipergeométrica multidimensional: distribuciones marginales y condicionales. La distribución multinomial y sus propiedades: distribuciones marginales y condicionales, función generatriz de momentos, medias, variancias y covariancias. Transformación de variables discretas y técnica del cambio de variable.

3.5 Generación de muestras de variables aleatorias discretas, simulación y aplicaciones.

3.6 Estimación de máxima de verosimilitud.

#### **Tema 4: Teoremas fundamentales de límites de distribuciones y distribución de sumas de variables aleatorias independientes**

4.1 Cálculo de la distribución de sumas de variables aleatorias por el método de la generatriz de momentos: suma de variables independientes: Bernoulli, Poisson, geométricas.

4.2 Aproximación de la binomial con la Poisson, de la hipergeométrica con la binomial. Teorema de Chebyshev. Teorema de Bernoulli. Ley débil de los grandes números. La distribución normal como límite de la binomial (teorema de De Moivre-Laplace). Teorema del Límite Central. Aplicaciones.

#### **Bibliografía**

##### **Libro de Texto**

Hernández Rodríguez, Oscar (2008). *Modelos probabilísticos discretos*. Editorial de la Universidad de Costa Rica, Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. Signatura 519.2 H557m

##### **Material complementario**

Wackerly, D., Mendenhall, W y Scheaffer, R. (2010). *Estadística Matemática con aplicaciones*. Thomson: México. Signatura 519.5 M537e7

De Groot, M. H. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Addison-Wesley Iberoamericana: México. Signatura 519.2 D321p2 E

Lang, S. (1976). *Cálculo I*. Fondo Educativo Interamericano S.A. Signatura 517 L271-c

Lipschutz, S., & Schiller, John. (2000). *Introducción a la probabilidad y a la estadística*. McGraw Hill. Signatura 519.207.6 L767i

Ross, S. (2010). *A first course on probability*. New Jersey: Prentice Hall.

##### **Metodología**

Las estrategias metodológicas incluyen la clase magistral, el trabajo individual, la discusión y reflexión sobre los concepto matemáticos y estadísticos expuestos. Se requiere la participación activa de los estudiantes en la resolución de ejercicios. Además, se considera importante que el estudiante evacúe sus dudas durante la





clase y realice los ejercicios y/o tareas obligatorias que el profesor asigne durante el ciclo. Estos ejercicios pretenden fortalecer los conocimientos, habilidades y destrezas fomentadas en clase. Se recomienda el trabajo en grupo para completar apuntes, resolver ejercicios y compartir estrategias de resolución.

Se utilizará la plataforma de Mediación Virtual (el aula virtual institucional) y Zoom para realizar las clases y consultas de manera sincrónica, subir videos y realizar algunas evaluaciones, así como repositorio de archivos, prácticas y otros documentos. Se recuerda que el estudiantado debe tener disponibilidad para realizar evaluaciones y asistir a clases sincrónicas en el horario del curso. Los exámenes parciales y de ampliación se realizará de manera presencial en las fechas y horario indicados.

También habrá clases asincrónicas que se comunicaran de manera oportuna. Es importante mencionar que, en este aspecto del tipo de clases (sincrónica y asincrónica), se debe tener cierta flexibilidad y su uso dependerá del tipo de materia que se este abordando. La comunicación con el docente, que se considera de carácter oficial, es la que se realizará mediante el correo institucional [joseandrey.zamora@ucr.ac.cr](mailto:joseandrey.zamora@ucr.ac.cr) (grupo 1), [guaner.rojas@ucr.ac.cr](mailto:guaner.rojas@ucr.ac.cr) (grupo 2) enviada por el entorno virtual institucional, por lo que toda la comunicación (oficial), se debe efectuar por este medio.

Por otro lado, mediante la matrícula el estudiantado manifiesta tener disponibilidad en el horario en el cual se ofrece el curso. Las clases sincrónicas no necesariamente serán grabadas ya sea por disposiciones de las personas asistentes, por disposición de la persona docente o por problemas técnicos, por lo tanto, la persona estudiante no debe asumir otros compromisos en el mismo horario del curso que dificulten su participación en el mismo. Las obligaciones adquiridas por el estudiante en horario de clase no se considerarán justificaciones para ausencias a evaluaciones o asignaciones que formen parte del curso.

## Cronograma

Semana	Fechas	Evaluación	Contenidos
1	28 marzo - 1 de abril		Tema 1.1
2	4 - 8 de abril		Tema 1.2
	11 - 15 de abril	Semana Santa	Tema 1.3
3	18 - 22 de abril	Examen corto 1 virtual (Jueves 21) Tema 1	Tema 1.3
4	25 - 29 de abril	Semana Universitaria	Tema 1.4
5	2 - 6 de mayo		Tema 2.1
6	9 - 13 de mayo		Tema 2.2
7	16 - 20 mayo		Tema 2.3
8	23 - 27 de mayo	Examen corto 2 virtual (Jueves 26) Tema 2	Tema 3.1
9	30 mayo - 4 de junio	I parcial presencial (Sábado 5, 1:00pm) Temas 1 y 2	Tema 3.2 Tema 3.3 Tema 3.4
10	6 - 10 de junio		Tema 3.5
11	13 - 17 de junio		Tema 3.6
12	20 - 24 de junio		



13	27 de junio - 1 de julio	Examen corto 3 virtual (Lunes 27) Tema 3	Tema 4.1
14	4 - 8 de julio	II parcial presencial (Sábado 9 de julio) Temas 3 y 4.1	Tema 4.2
15	11 - 15 de julio		Repaso Tema 4.2
16	18 - 22 de julio	Examen corto 4 virtual Tema 4.2 (Lunes 18 de julio)	Repaso

### Distribución de los porcentajes de evaluación

Tipo de evaluación	Materia evaluada	Fecha	Valor
Primer examen parcial presencial con duración de 3 horas	Tema 1 y 2	Sábado 5 de junio (1:00pm)	30%
Segundo examen parcial presencial con duración de 3 horas	Tema 3 y 4.1	Sábado 9 de julio (1:00pm)	30 %
Exámenes cortos (modalidad virtual).	Temas 1,2,3 y 4	Jueves 21 de abril, jueves 26 de mayo, lunes 27 de junio, lunes 18 de julio.	40 % (10% cada examen corto)
Prueba de ampliación Modalidad Virtual	Temas 1,2,3 y 4	Miércoles 27 de julio (8:00 am)	Nota mínima de 7.0 para aprobar el curso.

Nota para sesiones presenciales: Las fechas y horas de los exámenes están sujetas a la disponibilidad de aulas, por lo que eventualmente pueden variar, en cuyo caso se comunicará al estudiante en forma oportuna.

